令和 2 年度 学力検査問題 数学 解答

1 $f(x) = -3x^2 + 4ax = -3\left(x - \dfrac{2}{3}a\right)^2 + \dfrac{4}{3}a^2 \quad (a-1 \leqq x \leqq a+1)$ なので，

(1) i) $\dfrac{2}{3}a \geqq a \ (\Leftrightarrow a \leqq 0)$ のとき，$m(a) = f(a-1) = a^2 + 2a - 3 = (a+1)^2 - 4$

ii) $\dfrac{2}{3}a \leqq a \ (\Leftrightarrow a \geqq 0)$ のとき，$m(a) = f(a+1) = a^2 - 2a - 3 = (a-1)^2 - 4$

よって，$m(a) = \begin{cases} (a+1)^2 - 4 & (a < 0) \\ (a-1)^2 - 4 & (a \geqq 0) \end{cases}$ であり，$b = m(a)$ のグラフは下図 1 である。

(2) i) $a + 1 \leqq \dfrac{2}{3}a \ (\Leftrightarrow a \leqq -3)$ のとき，$M(a) = f(a+1) = a^2 - 2a - 3$

ii) $a - 1 \leqq \dfrac{2}{3}a \leqq a + 1 \ (\Leftrightarrow -3 \leqq a \leqq 3)$ のとき，$M(a) = f\left(\dfrac{2}{3}a\right) = \dfrac{4}{3}a^2$

iii) $\dfrac{2}{3}a \leqq a - 1 \ (\Leftrightarrow a \geqq 3)$ のとき，$M(a) = f(a-1) = a^2 + 2a - 3$

したがって，これらと (1) より

$$M(a) - m(a) = \begin{cases} -4a & (a < -3) \\ \dfrac{1}{3}(a-3)^2 & (-3 \leqq a < 0) \\ \dfrac{1}{3}(a+3)^2 & (0 \leqq a < 3) \\ 4a & (a \geqq 3) \end{cases}$$

よって，$b = M(a) - m(a)$ のグラフは下図 2 である。また，$M(a) - m(a)$ は，$a = 0$ で最小値 3 をとる。

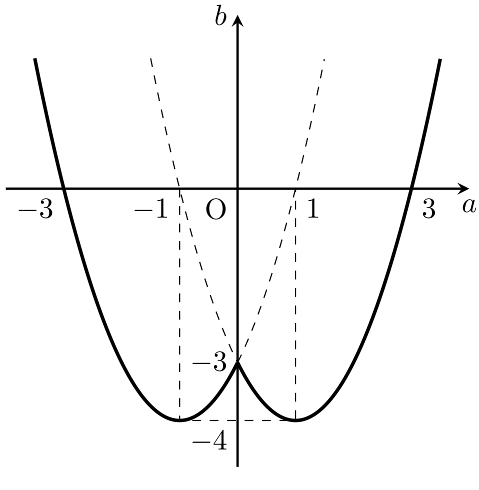


図 1

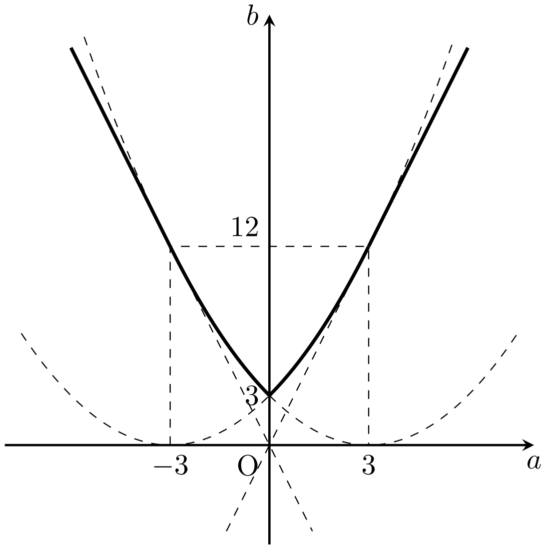


図 2

2

(1) 点 Q は半直線 OP 上にあるので，ある正の実数 k を用いて $x = ks,\ y = kt$ と表せる。
$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = 4$ より

$$\begin{aligned} 4 &= \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{s^2+t^2} = \sqrt{(ks)^2+(kt)^2}\sqrt{s^2+t^2} = \sqrt{k^2\left(s^2+t^2\right)}\sqrt{s^2+t^2} \\ &= |k|\sqrt{s^2+t^2}\sqrt{s^2+t^2} = k\left(s^2+t^2\right) \end{aligned}$$

よって $k = \dfrac{4}{s^2+t^2}$ なので，これを代入して，$x = \dfrac{4s}{s^2+t^2},\ y = \dfrac{4t}{s^2+t^2}\ \cdots$ ①

(2) 点 $\mathrm{Q}(s,t)$ が求める軌跡上にあるための条件は，$(s,t) \neq (0,0)$ かつ，点 $\left(\dfrac{4s}{s^2+t^2}, \dfrac{4t}{s^2+t^2}\right)$ が直線 $x+2y=5$ 上にあることである。そこで，① を $x+2y=5$ に代入して，

$$\frac{4s}{s^2+t^2} + 2\cdot\frac{4t}{s^2+t^2} = 5 \iff 4s+8t = 5\left(s^2+t^2\right) \iff \left(s-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(t-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

したがって，点 Q の軌跡は $\left(x-\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(y-\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{5}$ かつ $(x,y) \neq (0,0)$，すなわち

円 $\left(x-\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(y-\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{5}$ から原点を除いた部分であり，図示すると下図 3 となる。

(3) (2) と同様に考える。① を $(x-1)^2+(y-2)^2 < 5 \iff x^2+y^2 < 2x+4y$ に代入して，

$$\begin{aligned} \left(\frac{4s}{s^2+t^2}\right)^2 + \left(\frac{4t}{s^2+t^2}\right)^2 < 2\cdot\frac{4s}{s^2+t^2} + 4\cdot\frac{4t}{s^2+t^2} &\iff \frac{16\left(s^2+t^2\right)}{\left(s^2+t^2\right)^2} < \frac{8s+16t}{s^2+t^2} \\ &\iff 2 < s+2t \end{aligned}$$

また，① を $x+2y<5$ に代入して，((2) と同様の計算により) $\left(s-\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(t-\dfrac{4}{5}\right)^2 > \dfrac{4}{5}$

$(s,t) = (0,0)$ は $2 < s+2t$ を満たさないので，求める領域は

$$x+2y > 2 \quad \text{かつ} \quad \left(x-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{4}{5}\right)^2 > \frac{4}{5}$$

を満たす部分である。図示すると，下図 4 の色付き部分（境界は含まない）となる。

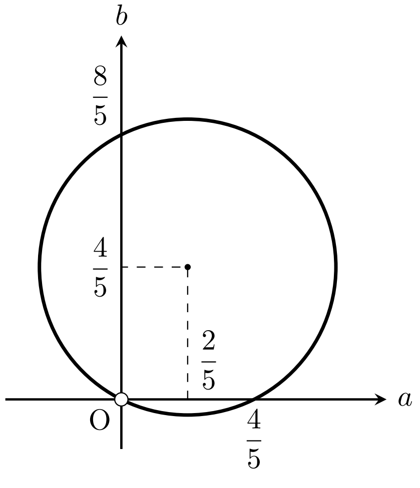


図 3

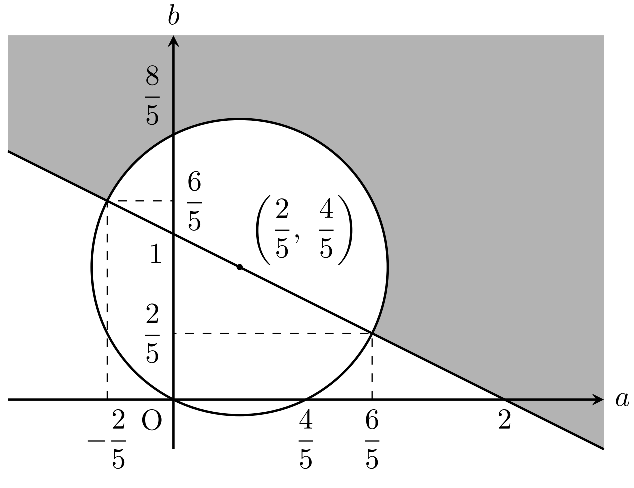


図 4

$\boxed{\textbf{3}}$

(1) $P(x)=x^5-6x^4+13x^3-12x^2+4x=x(x-1)^2(x-2)^2$

(2) $y^2=P(x)=x(x-1)^2(x-2)^2 \geqq 0$ より $x \geqq 0$ であり，$x \geqq 0$ のとき

$$y^2=x(x-1)^2(x-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm(x-1)(x-2)\sqrt{x}$$

である。$y=-(x-1)(x-2)\sqrt{x}$ のグラフは，$y=(x-1)(x-2)\sqrt{x}$ のグラフを x 軸に関して折り返して得られるので，$y=(x-1)(x-2)\sqrt{x}$ のグラフのみを調べればよい。

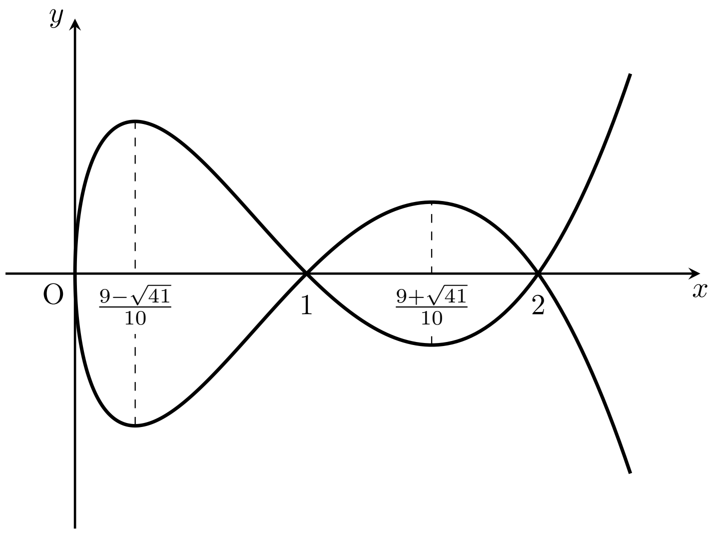
$y=(x-1)(x-2)\sqrt{x}=x^{\frac{5}{2}}-3x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}$ $(x \geqq 0)$ について，

$$y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\frac{5x^2-9x+2}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2\sqrt{x}}\left(x-\frac{9+\sqrt{41}}{10}\right)\left(x-\frac{9-\sqrt{41}}{10}\right)$$

したがって，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{9-\sqrt{41}}{10}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{9+\sqrt{41}}{10}$	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	／	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗

以上より，曲線 $y^2=P(x)$ の概形は下図のようになる。



(3) (2) より，曲線 $y^2=P(x)$ で囲まれる部分は 2 箇所ある。これら 2 箇所の面積の和 S は，

$$\begin{aligned}
S&=2\int_0^1 (x-1)(x-2)\sqrt{x}\,dx+2\int_1^2 \left\{-(x-1)(x-2)\sqrt{x}\right\}dx\\
&=2\left\{\int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}}-3x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right)dx+\int_2^1 \left(x^{\frac{5}{2}}-3x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right)dx\right\}\\
&=2\left\{\left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_2^1\right\}\\
&=2\left\{2\left(\frac{2}{7}-\frac{6}{5}+\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{2}{7}\cdot 2^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}\cdot 2^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\right)\right\}\\
&=8\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)-2^{\frac{9}{2}}\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{176-32\sqrt{2}}{105}
\end{aligned}$$

4 「箱 X が k 番の箱である」という事象を A_k（$k=0,1,\ldots,n$），
「m 回目に取り出した玉が赤玉である」という事象を R_m（$m=1,2,\ldots$）とする。
このとき，与えられた条件より

$$P(A_k)=\frac{1}{n+1}\quad(k=0,1,\ldots,n),\quad P_{A_k}(R_m)=\frac{k}{n}\quad(m=1,2,\ldots;k=0,1,\ldots,n)$$

が成立する。また，A_k という条件のもとでは，k 番の箱から何回も赤玉を取り出すので，

$$P_{A_k}(R_1\cap R_2)=\left(\frac{k}{n}\right)^2,\quad P_{A_k}(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_m)=\left(\frac{k}{n}\right)^m\quad(k=0,1,\ldots,n)$$

なども成立する。したがって，

(1) $P(R_1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(A_k\cap R_1)=\sum_{k=0}^{n}P(A_k)P_{A_k}(R_1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{k}{n}=\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}$

よって，1 回目の操作で取り出した玉が赤玉である確率は $\dfrac{1}{2}$ である。また，

$$P_{R_1}(A_k)=\frac{P(R_1\cap A_k)}{P(R_1)}=\frac{P(A_k)P_{A_k}(R_1)}{P(R_1)}=\frac{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{k}{n}}{\frac{1}{2}}=\frac{2k}{n(n+1)}$$

したがって，1 回目の操作で取り出した玉が赤玉であったとき，箱 X が k 番の箱である確率は $\dfrac{2k}{n(n+1)}$ である。

(2) $P(R_1\cap R_2)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(A_k\cap R_1\cap R_2)=\sum_{k=0}^{n}P(A_k)P_{A_k}(R_1\cap R_2)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$

$$=\frac{1}{n^2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{1}{n^2(n+1)}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{2n+1}{6n}$$

したがって，求める確率は $\dfrac{2n+1}{6n}$ である。

(3) 求める確率は，$P_{R_1}(R_2)=\dfrac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_1)}=\dfrac{\frac{2n+1}{6n}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2n+1}{3n}$

(4) (2) と同様に考えて，

$$P(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_m)=\sum_{k=0}^{n}P(A_k)P_{A_k}(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_m)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^m$$

ここで区分求積法により，

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^m=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m\xrightarrow[n\to\infty]{}1\cdot\int_0^1x^mdx=\left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}\right]_0^1=\frac{1}{m+1}$$

したがって，

$$p_m(n)=P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_m}(R_{m+1})=\frac{P(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_m\cap R_{m+1})}{P(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_m)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\frac{1}{m+2}}{\frac{1}{m+1}}=\frac{m+1}{m+2}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_m(n)=\frac{m+1}{m+2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$

(1) 球面 S の中心は，線分 AB の中点なので $(4,-2,0)$ である。
また，S の半径は $\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$
よって，球面 S の方程式は $(x-4)^2+(y+2)^2+z^2=14$ $\cdots$ ①

(2) 点 $\mathrm{D}(x,y,z)$ は直線 AC 上の点なので，ある実数 k を用いて

$$(x,y,z)=\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3-2k,\ 1-4k,\ 2+2k)\ \cdots②$$

と表せる。さらに，点 D は球面 S 上にもあるので，② を ① へ代入して，

$$\{(3-2k)-4\}^2+\{(1-4k)+2\}^2+(2+2k)^2=14 \iff 24k^2-12k=0 \iff k=0,\frac{1}{2}$$

$\mathrm{D}\neq\mathrm{A}$ より $k\neq 0$ なので，$k=\dfrac{1}{2}$ である。これを ② へ代入して，$\mathrm{D}(2,-1,3)$

(3) 点 H は平面 α 上にあるので，ある実数 s,t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表せる。
これより，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される。
一方，BH は平面 α に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ である。したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0 &\iff \left(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ &\iff s\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} \iff 14s+8t=6\ \cdots③\end{aligned}$$

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0 \iff 8s+26t=12$ $\cdots$ ④
③, ④ を s,t について解いて，$s=\dfrac{1}{5},\ t=\dfrac{2}{5}$ を得る。
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,-1,2)$ となるので，$\mathrm{H}(1,-1,2)$ である。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}=(1,2,-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=(-1,0,-1)$ より $\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DH}}=0$ なので，$\cos\angle\mathrm{ADH}=0$
球面 S と平面 α が交わってできる円を K とする。このとき，
つくり方から，A,D はいずれも S 上かつ α 上，すなわち K 上にある。また，
$\mathrm{BH}\perp\alpha$ より $\mathrm{BH}\perp\mathrm{AH}$ なので，H は球面 S 上にある。H は α 上の点でもあるので，H も K 上にある。
以上により，3 点 $\mathrm{A},\mathrm{D},\mathrm{H}$ はいずれも円 K 上の点であることが確かめられた。
さらに $\mathrm{AD}\perp\mathrm{DH}$ なので，線分 AH は円 K の直径である。
したがって，求める直径は $\mathrm{AH}=\sqrt{2^2+2^2+0^2}=2\sqrt{2}$